11. Taajuusalueen operaatiot

Fourier-muunnos

Kuvan spektrianalyysi

Suodatus taajuusalueella

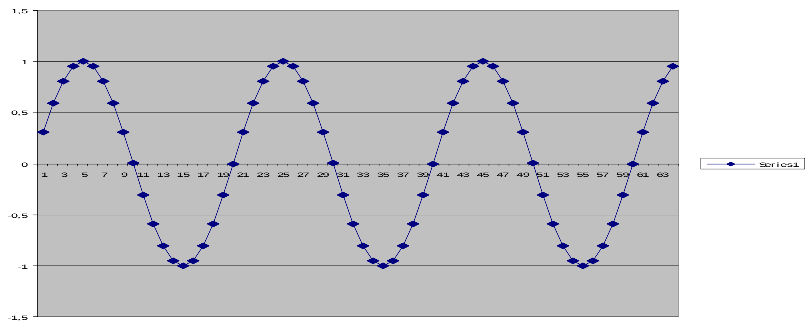
Dekonvoluutio

Taajuus- eli frekvenssitarkastelun idea

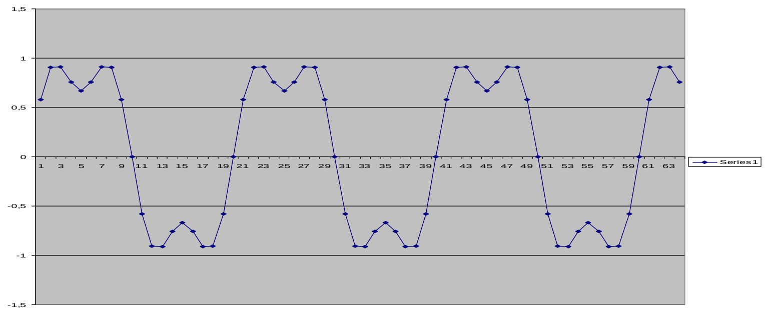
- Kuvan esitysmuodon muutos eritaajuisten *jaksollisten* komponenttien yhdelmäksi
- Kuvan sävyjen hitaat/nopeat vaihtelut kuvautuvat taajuuskomponenttien kertoimiin.
- Miksi tällainen muunnos?
  - Monet operaatiot (esim. suodatus) kätevämpiä taajuusalueella
  - Käyttö kuvan pakkauksessa (JPEG)

Esimerkki: siniaaltojen yhdistelmiä

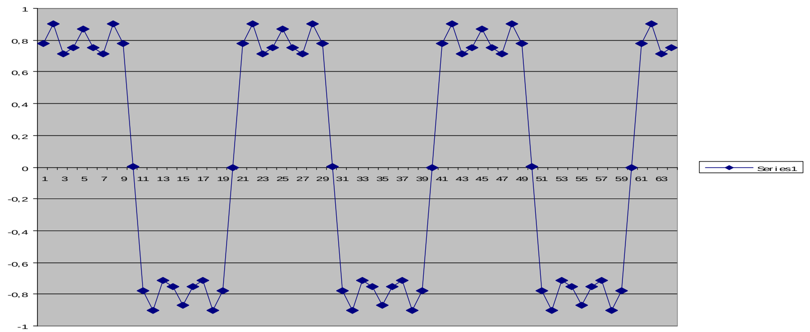
Yksi siniaalto



Kaksi siniaaltoa



Kolme siniaaltoa



Fourier-teorian perusteet

- Jokainen jaksollinen funktio *f* (jakson pituus *L*) voidaan esittää muodossa

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[a_n \cos \frac{2\pi nx}{L} + b_n \sin \frac{2\pi nx}{L} \right]$$

- 2-ulotteinen funktio vastaavasti:

$$f(x, y) = \sum_{u=0}^{\infty} \sum_{v=0}^{\infty} \left[a_{u,v} \cos \frac{2\pi (ux + vy)}{L} + \right.$$
$$\left. b_{u,v} \sin \frac{2\pi (ux + vy)}{L} \right]$$

- $a_{u,v}$ ja $b_{u,v}$ ovat taajuuskomponenttien kertoimet

Yleinen (jatkuva) Fourier-muunnos

- Jatkuvan funktion *f* Fourier-muunnos:

$$F(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\left[\cos(2\pi ux) - i\sin(2\pi ux)\right]dx$$

- Käänteismuunnos lähes identtinen:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(u)\left[\cos(2\pi ux) + i\sin(2\pi ux)\right]du$$

- Huom! Liikutaan kompleksialueella.

Diskreetti Fourier-muunnos

- Sovelletaan äärelliselle pistejoukolle
- Integraalien sijasta äärellisiä summia
- Diskreetin funktion esittäminen eritaajuisten sini- ja kosinifunktioiden (ns. kantafunktioiden) avulla
- Muunnoksen tulos = summaesityksen kertoimet
- Käänteismuunnos (lähes) identtinen.
- Ketju: *f* → Fourier-muunnos → jokin operaatio → käänteismuunnos → *f’*

2-ulotteinen diskreetti Fourier-muunnos

- Tiedetään kuvafunktio *f*(*x,y*), *x,y*=0, ..., *N*-1

$$F(u,v) = \frac{1}{N}\sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{N-1} f(x,y)\left[\cos\frac{2\pi(ux+vy)}{N} - i\sin\frac{2\pi(ux+vy)}{N}\right]$$

- Käänteismuunnos:

$$f(x,y) = \frac{1}{N}\sum_{u=0}^{N-1}\sum_{v=0}^{N-1} F(u,v)\left[\cos\frac{2\pi(ux+vy)}{N} + i\sin\frac{2\pi(ux+vy)}{N}\right]$$

Huomioita muunnoksesta

- Lähtökohta (*f*) ja tulos (*F*) molemmat N x N –matriiseja (yleis. M x N).
- Muunnoksessa ei katoa informaatiota, vaan *f* voidaan palauttaa periaatteessa tarkasti (laskentatarkkuuden rajoissa).
- *F*-matriisin alkiot kertovat, miten voimakkaina kantafunktioita vastaavat kirkkausvaihtelut esiintyvät kuvassa.
- Ongelma: *F*-arvot kompleksilukuja.

Kuvan spektrit

- *F*:n esitys kahtena reaalimatriisina
- Merkitään (polaariesitys & Eulerin kaava):

$$F(u,v) = R(u,v) + iI(u,v) = \left|F(u,v)\right| e^{i\phi(u,v)}$$

missä *amplitudispektri*:

$$\left|F(u,v)\right| = \sqrt{R^2(u,v) + I^2(u,v)}$$

ja *vaihespektri*:

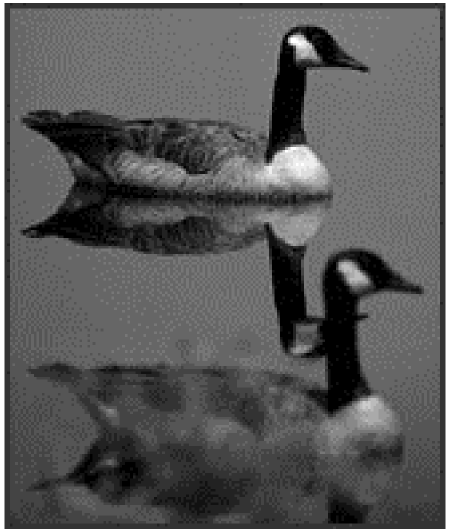
$$\phi(u,v) = \arctan \frac{I(u,v)}{R(u,v)}$$

Spektrien tulkinta

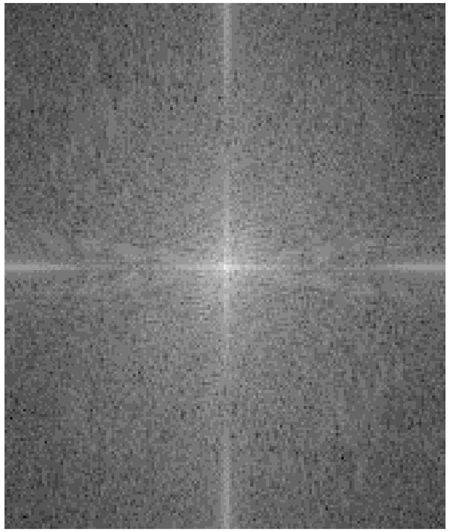
- Amplitudispektri |*F*(*u*, *v*)| sisältää kuvan piirteet ja niiden kirkkaudet.
  Huom. ns. *tehospektri* on
  $$\left|F(u,v)\right|^2 = R^2(u,v) + I^2(u,v)$$
- Vaihespektri sisältää piirteiden muodot.
- Spektrejä voidaan tarkastella myös kuvallisina esityksinä (huom. origo yleensä keskellä):
  - Amplitudispektrin kuva sisältää kirkkaita pisteitä ja linjoja, joita voidaan tulkita
  - Vaihespektrin visuaalinen tulkinta vaikeaa

Esimerkki spektreistä

Alkuperäinen kuva



Tehospektri



Vaihespektri

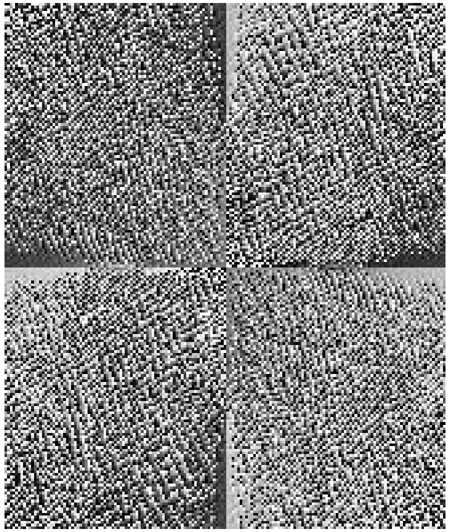
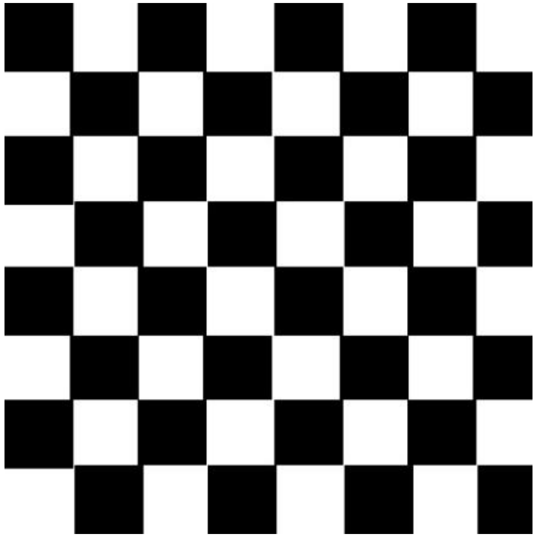
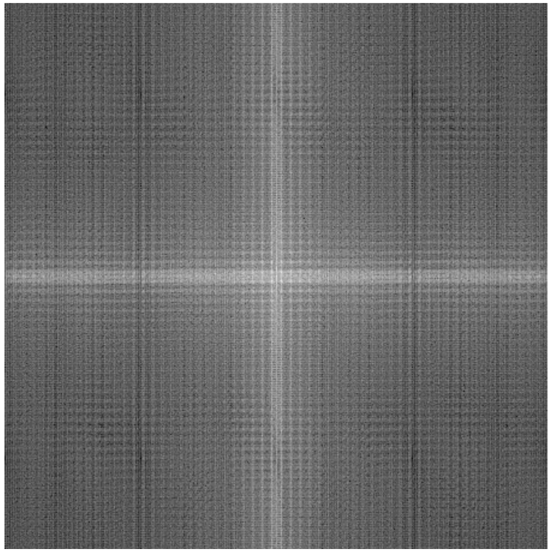


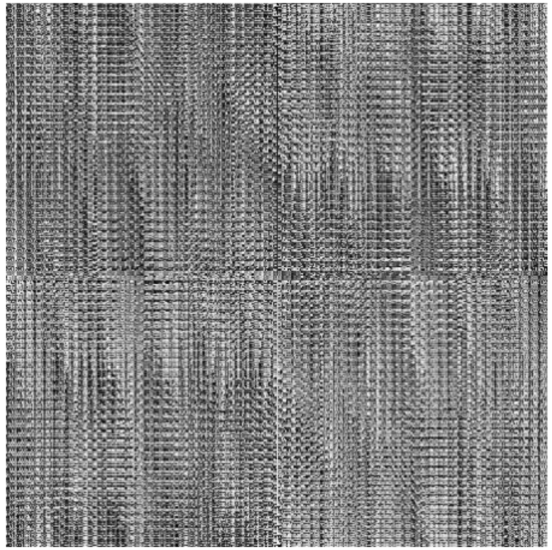
Photo Credit: US Fish and Wildlife Service
Archive: Gimp-Savvy

Toinen esimerkki

Alkuperäinen kuva   Tehospektri   Vaihespektri







Lisää Fourier-muunnoksen ominaisuuksia

- *Jaksollisuus*: $F(u,v)$ toistaa itseään äärettömiin N:n kokoisissa jaksoissa.
- Kuvatulkinta: Vasen ja oikea reuna vierekkäin, samoin ylä- ja alareuna (vrt. konvoluutio kuvan reunoilla).
- Ns. *konjugaattisymmetria*: $|F(u,v)| = |F(-u,-v)|$ Spektri sisältää siis puolet redundanssia (mutta: luvut kompleksilukuja; sama määrä infoa kuin alkuperäisessä kuvassa)

Nopea Fourier-muunnos (FFT)

- Peruskaavan kompleksisuus O(N^4)
- 1. nopeutus: Muunnos *separoituva*:
  - Ensin Fourier-muunnos *y*:n, sitten *x*:n suhteen (tai päinvastoin)→O(N^3)
- 2. nopeutus: *Hajoita-ja-hallitse*:
  - *N*-kokoinen Fourier-muunnos voidaan laskea kahden *N*/2-kokoisen (toisiaan muistuttavan) muunnoksen summana
  - *Rekursio*, kunnes N=2
- 2-ulotteisen FFT:n kompleksisuus : O($N^2 \log N$)
- Perusversio: *N* muotoa 2^k,
  tarvittaessa laajennetaan kuvaa 0-arvoilla.

Suodatus taajuusalueella

- ’Luonnollisempaa’ kuin konvoluutio spatiaalisella alueella.
- Voidaan määritellä tarkasti vaikutus spatiaalisiin taajuuksiin, eli kuva-alueella ilmeneviin (säännöllisiin) vaihteluihin.
- Konvoluutiota vastaava operaatio on kätevä toteuttaa taajuusalueella.

Suodattimen siirtofunktio

- Suodatuksen tuloskuva Fourier-muunnettuna: $G(u, v) = F(u, v)H(u, v)$
  - F = kuvan spektri
  - H = *suodattimen siirtofunktio* = konvoluutiokernel Fourier-muunnettuna
  - Tulo lasketaan alkioittain, laskut kompleksilukualueella
- Useimmat suodattimet eivät vaikuta vaihespektriin, vain amplitudispektriin

Konvoluutioteoreema

- Perustavaa laatua oleva tulos:

  $$f * h \leftrightarrow FH$$

  Uusi konvoluution laskentaproseduuri:

  1. Laketaan kuvan *f* Fourier-muunnos *F*
  2. Lasketaan ytimen *h* Fourier-muunnos *H*
  3. Lasketaan tulo *FH* alkioittain
  4. Muodostetaan *FH*:n käänteismuunnos

- Huom! Konvoluutioytimen tulee olla samankokoinen kuin kuva – laajennus nollilla.

Laskentatyömäärien vertailu

- Oletukset: kuva N x N, ydin n x n
- Spatiaaliseen esitykseen liittyvä työmäärä: $O(N^2 n^2)$
- Taajuusesitykseen liittyvä työmäärä:
  - 2 x Fourier + käänteinen: $O(N^2 \log N)$
  - Suodatus: $O(N^2)$ kertolaskua
  - Yhteensä: $O(N^2 \log N)$
  - Kannattaa, jos n (ytimen koko) suuri

Alipäästösuodatin taajuusalueella

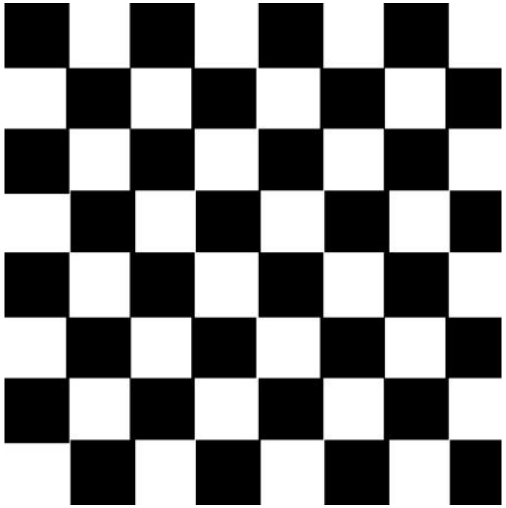
- ’Ideaalisuodatin’ (ei tarkoita ’paras’) eliminoi korkeat taajuudet tiettyyn rajaan asti.
- Suodattimen siirtofunktio

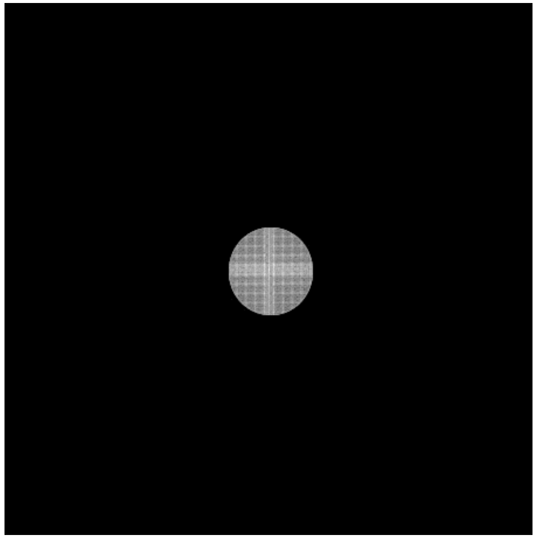
$$H(u,v) = \begin{cases} 1, \text{ jos } r(u,v) \le r_0 \\ 0, \text{ jos } r(u,v) > r_0 \end{cases}$$

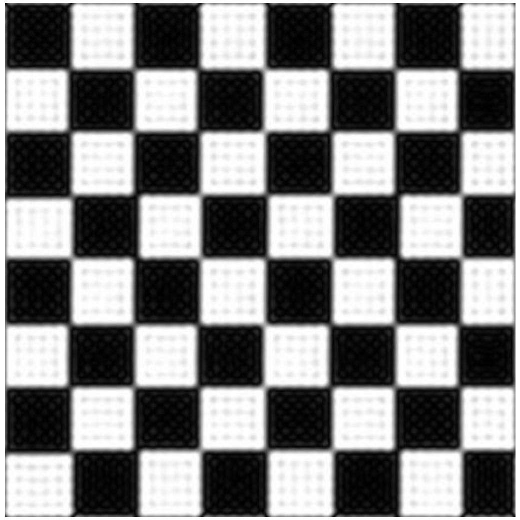
  - r_0 = suodattimen säde
  - $r(u,v) = \sqrt{u^2 + v^2}$ = etäisyys spektrin origosta
  - Samentaa, synnyttää väreilyä
  - Vastaava konvoluutioydin sisältää rengasmaisia aaltoja jotka ’reagoivat’ kohteiden ääriviivoihin.

Esimerkki ideaalisesta alipäästö-suodatuksesta

Alkuperäinen Siirtofunktio·tehospektri Tulos







Butterworthin alipäästösuodatin

- Klassinen siirtofunktio; lähenee 0:aa

$$\frac{1}{1+(r(u,v)/r_0)^{2n}}$$

  - r_0 = etäisyys, jossa H on pudonnut puoleen max-arvosta
  - n = säätöparametri (esim. 1-3); pieni n: loiva pudotus, iso n: jyrkempi
- Ehkäisee tuloskuvan väreilyn
- Vaihtoehto: Gaussin suodatin; Gaussin funktion Fourier-muunnos on myös Gaussin funktio

Ylipäästösuodatus taajuusalueella

- ’Ideaalinen’ ylipäästösuodatin eliminoi matalat taajuudet tiettyyn rajaan asti

$$H_S(u,v) = \begin{cases} 0, \text{ jos } r(u,v) < r_0 \\ 1, \text{ jos } r(u,v) \geq r_0 \end{cases}$$

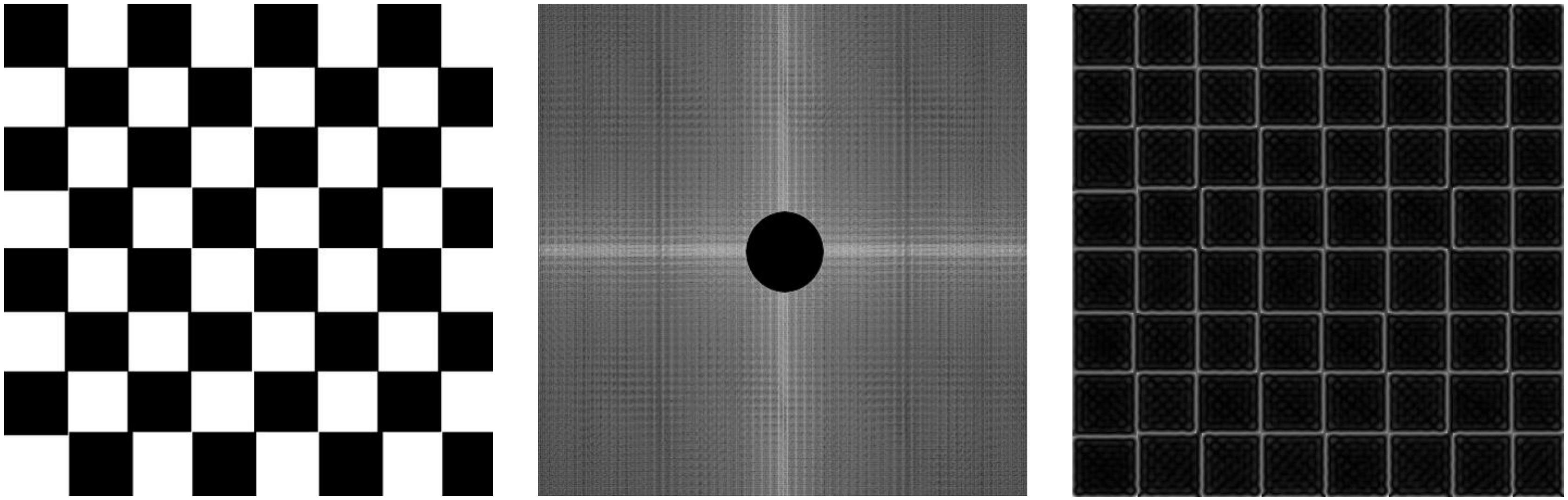
- Tuottaa kuvaan väreilyä, vältetään esim. *Butterworthin ylipäästösuodattimella*

$$H(u,v) = \frac{1}{1 + (r_0 / r(u,v))^{2n}}$$

- Lähestyy ideaalisuodatinta kun n→∞

Esimerkki ideaalisesta ylipäästösuodattimesta

Alkuperäinen Siirtofunktio·tehospektri Tulos



Kaistanpäästö-/kaistanestosuodatin

- Voidaan määritellä ali-/ylipäästösuodattimien yhdelmänä (säteet r_{low} ja r_{high}).
- Yleensä määritellään kaistan keskisäteen r_0 ja kaistan leveyden Ω avulla.
- *Butterworthin kaistanestosuodatin*:

$$H_s(r) = \frac{1}{1 + [\Omega r / (r^2 - r_0^2)]^{2n}}, \text{ missä } r = \sqrt{u^2 + v^2}$$

- *Butterworthin kaistanpäästösuodatin*:
  $H_p(r) = 1 - H_s(r)$

Jaksollisten häiriöiden poisto

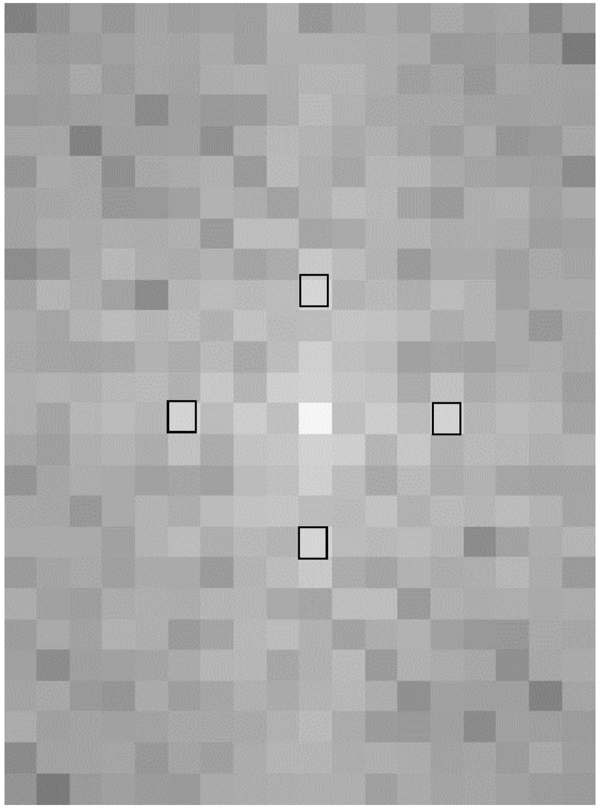
- Esim. videokuvan muodostuksessa läheiset sähkömekaaniset laitteet voivat aiheuttaa häiriöitä.
- Häiriöt yleensä jaksollisia (vastaten häiriölaitteen taajuutta)
- Siniaaltomuotoinen häiriö näkyy spektrikuvassa kirkkaana pisteparina
- Häiriö voidaan poistaa poistamalla ko. taajuudet (tarvitaan spektrin editori).

Esimerkki jaksollisesta häiriöstä

Talo, jossa siniaaltohäiriöitä

Spektrin suurennos häiriökohdat merkattu

Häiriökohdat nollattu



Häiriölähteitä

- Kuvanmuodostuslaitteen synnyttämä kohina
- Epätarkka fokusointi
- Liikkuva kohde (→pyrstömäisyys)
- Kameran liike kuvaustilanteessa
- Ilmakehän häiriöt kaukokuvissa

Häiriöiden mallinnus

- Ajatusmalli: Huono kuva $\overset{\frown}{f}$ tuloksena hyvän kuvan *f* samennuksesta konvoluutiolla *h*, ja kohinan ε lisäyksestä

$$\overset{\frown}{f}(x,y) = f(x,y) * h(x,y) + \varepsilon(x,y)$$

- Huom! *h*(*x,y*) ja ε(*x,y*) voivat vaihdella pikselikohtaisesti.
- Yksinkertaistus: Häiriöt spatiaalisesti invariantteja, kohina vähäinen:

$$\overset{\frown}{f}(x,y) = f(x,y) * h$$

Dekonvoluution idea

- Jotta hyvä kuva $f(x,y)$ voitaisiin tuottaa, tarvittaisiin konvoluutiolle käänteinen operaatio, mutta:
  - Samennusydin h tuntematon
  - Jos tunnetaan, miten käännetään?
- h:ta kutsutaan ’pisteenlevitysfunktioksi’ (*point spread function*, *PSF*)
  - Kuvaa, miten pisteen ’energia’ levinnyt ympäristöön kuvanmuodostuksessa.

PSF:n johtaminen

- Voidaan joskus johtaa teoreettisista tarkasteluista.
- Kuvanottotilanteesta voidaan tehdä päätelmiä.
- Liikkeen aiheuttama sumeus: kohteen suunta, nopeus ja kuvan valotusaika määräävät häiriön suunnan ja pituuden pikseleinä
- Voidaan tehdä mittauksia kuvasta: pisteen/reunan hajaantuminen.

Käänteissuodatin

- Helppo taajuusalueella: konvoluutioteoreeman mukaan Fourier-muunnoksille pätee:

$$\hat{F}(u,v) = F(u,v)H(u,v)$$

- H on *moduloinnin siirtofunktio* (Modulation Transfer Function, MTF)
- Häiriöttömän kuvan johtaminen

$$F(u,v) = \hat{F}(u,v)\frac{1}{H(u,v)}$$

- 1/H(u,v) on ns. *käänteissuodatin*

Dekonvoluution ongelmia

- MTF (= $H(u,v)$) voi tulla nollaksi → nollalla jako
- Jos ei kohinaa (ε(x,y)=0), myös $\widehat{F}(u,v) = 0$
  → 0/0, arvo epämääräinen
- Jos kohinaa on, niin (merk. E = Fourier(ε)):

$$\widehat{F}(u,v) = F(u,v)H(u,v) + E(u,v)$$

$$F(u,v) = \frac{\widehat{F}(u,v)}{H(u,v)} - \frac{E(u,v)}{H(u,v)}$$

- $E(u,v)/H(u,v)$ voi tulla mieliv. suureksi; ratkaisuja:
  - Jos $H(u, v)$<kynnysarvo, niin $F(u, v) \leftarrow 0$
  - Rajoit. käänteissuod. tietylle etäisyydelle (→ väreitä)
  - *Wiener-suodatin*: kohinan varianssi mukaan kaavaan